На правах рукописи

Черанева Анна Владимировна

ЯДРА И ПУЧКИ ПОЛУТЕЛ

Специальность 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2008

Работа выполнена на кафедре высшей математики
физико-математического факультета
Вятского государственного гуманитарного университета

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор ВЕЧТОМОВ Евгений Михайлович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор КОЖУХОВ Игорь Борисович
кандидат физико-математических наук,
доцент ИЛЬИН Сергей Николаевич

Ведущая организация: Ульяновский государственный университет

Защита состоится «__»__________200 г. в __ часов на заседании диссертационного совета Д 212.081.24 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18., ауд. ____.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35.

Автореферат разослан «__»__________200 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к. ф.-м. н., доцент А.И. Еникеев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Данное диссертационное исследование посвящено сравнительно новому разделу современной алгебры – теории полутел.

Изучение полутел ведется с 60-х годов XX века в рамках теории полуколец. Теория полуколец начала развиваться в 50-е годы прошлого столетия в работах американских и японских математиков. Пожалуй, первой книгой по общей теории полуколец стала монография Дж. Голана[1] 1992 года . В ней имеется определенная информация о делимых полукольцах и полутелах.

Х. Вайнерт[2] в 1964 году показал, что класс идемпотентных полутел совпадает с классом решеточно упорядоченных групп. С. В. Полин[3] в статье 1974 года ввел естественный порядок на полутелах, описал простые полуполя и доказал, что любое простое полутело либо идемпотентно, либо является сократимым полуполем. В большой статье 1990 года Х. Хетчинс, Х. Вайнерт[4] изучали общие свойства ядер полутел, в частности установили изоморфизм между решетками конгруэнций и ядер произвольного полутела; рассматривали алгебраические и трансцендентные расширения полуполей, вкладываемых в поля.

Позднее А. Н. Семенов [5] доказал, что всякое полутело является расширением сократимого полутела при помощи идемпотентного полутела. Этот результат явился одной из первых общих структурных теорем теории полутел.

Важные свойства решетки ядер полутел установлены А. Н. Семеновым[6], который в частности доказал, что конечность решетки ядер полутела влечет ее дистрибутивность.

---

[1] Golan, J. S. The theory of semirings with applications in mathematics and theoretical computer science [text] / J. S. Golan. – Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics, 1992. – V. 54. – 318 p.

[2] Weinert, H. J. Ein Struktursatz für idempotente Halbkörper [text] / H. J. Weinert // Acta math. Acad. scient. hung. – 1964. – V. 15. – №3–4. – S. 289–295

[3] Полин, С. В. Простые полутела и полуполя [текст] / С. В. Полин // Сибирский математический журнал. – 1974. – Т. 15. – №1. – С. 90–101

[4] Hutchins, H. C. Homomorphisms and kernel of semifields [text] / H. C. Hutchins, H. J. Weinert // Periodica Mathematica. – 1990. – V. 21(2). – P. 113–152

[5] Семенов, А. Н. О строении полутел [текст] / А. Н.Семенов // Вестник ВятГГУ. – 2003. – № 8. – С. 105–107

[6] Семенов, А. Н. О решетке конгруэнций полутел [текст] / А. Н. Семенов // Вестник ВятГГУ. – 2003. – №9. – С. 92–95

А. В. Ряттель [7] изучала линейно упорядоченные полутела и алгебраические расширения идемпотентных полуполей, описала циклические полутела и однопорожденные идемпотентные полуполя.

Алгебраические уравнения над полуполями и полутелами и алгебраические расширения сократимых полуполей исследовал И. И. Богданов [8].

В связи с развитием идемпотентного анализа В. П. Масловым и его учениками исследовались вопросы линейной алгебры и теории уравнений над идемпотентными полуполями. Заметим также, что теория полуколец и полутел находит применение и в дискретной математике.

О. В. Старостина[9,10] завершила построение теории абелево-регулярных положительных полуколец (arp-полуколец), начало которой было положено в работе Е. М. Вечтомова, А. В. Михалева, В. В. Чермных [11], и уточнила взаимосвязи arp-полуколец с полутелами их обратимых элементов. М. А. Лукин [12] описал алгебраическое строение полукольцевых дизъюнктных объединений кольца и полутела.

Полутелом называется алгебраическая структура с бинарными операциями сложения и умножения, являющаяся одновременно аддитивной коммутативной полугруппой и мультипликативной группой, причем умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон.

Класс полутел образует многообразие универсальных алгебр в сигнатуре $\langle +, \cdot, ^{-1}, 1 \rangle$ типа $(2, 2, 1, 0)$. Поэтому для полутел справедливы известные теоремы о гомоморфизме и об изоморфизме.

Полутела можно определить также как делимые полукольца с квазитождеством $a + b = 0 \Rightarrow a = 0$ с выброшенным затем нулем. Заметим, что неодноэлементные делимые полукольца исчерпываются телами и полутелами

[7] Ряттель, А. В. Положительно упорядоченные полутела: дис. ... канд. физ.-матем. наук: 01.01.06: защищена 17.03.2003/ А. В. Ряттель. – Киров: ВятГГУ, 2002. – 89 с.

[8] Богданов, И. И. Полиномиальные соотношения в полукольцах: дис. ... канд. физ.-матем. наук: 01.01.06: защищена 20.02.2004/ И. И. Богданов. – М.: МГУ, 2004. – 72 с.

[9] Вечтомов, Е. М. Структура абелево-регулярных положительных полуколец [текст] / Е. М. Вечтомов, О. В. Старостина // Успехи математический наук. – 2007. – Т. 62. – Вып. 1. – С. 199–200

[10] Старостина, О. В. Абелево-регулярные положительные полукольца: дис. ... канд. физ.-матем. наук: 01.01.06: защищена 29. 10. 2007. – Киров: ВятГГУ, 2007. – 90 с.

[11] Вечтомов, Е. М. Абелево-регулярные положительные полукольца [текст] / Е. М. Вечтомов, А. В. Михалев, В. В. Чермных // Труды семинара им. И. Г. Петровского. – 1997. – Т. 20. – С. 282–309

[12] Лукин, М. А. Дизъюнктное полукольцевое объединение кольца и полутела [текст] / М. А. Лукин // Чебышевский сборник. – 2005. – Т. 6. – Вып. 4(16). – С. 126–135

с нулем.

Полутела, будучи группами с дополнительной коммутативно-ассоциативной операцией сложения, обладают рядом специфических алгебраических свойств. Мультипликативные группы полутел являются группами без кручения. В неидемпотентных полутелах аддитивный порядок элементов бесконечен. Конгруэнции на полутелах однозначно определяются своими классами единицы – ядрами, которые можно охарактеризовать как нормальные подгруппы мультипликативной группы полутела с условием выпуклости. Относительно естественного порядка полутела являются упорядоченными алгебраическими системами. Каждое полутело имеет кольцо разностей. Сократимые полутела вкладываются в свои кольца разностей. Поэтому изучение полутел допускает методы теории колец.

При исследовании полутел можно применить функциональный подход, при котором полутело реализуется в виде полутела сечений пучка некоторых более просто устроенных полутел над подходящим топологическим пространством. Этот подход осуществляется в диссертации.

Основы функциональных представлений различных тополого-алгебраических систем заложили М. Стоун, И. М. Гельфанд, И. Капланский в середине прошлого столетия. Представление колец сечениями пучков изучали А. Гротендик (1960 год), Р. Пирс (1967 год), Дж. Ламбек (1971 год), К. Хофман (1972 год), К. Малви (1979 год), Х. Симмонс (80-е годы XX столетия). На русском языке теория функциональных представлений колец изложена в монографии Е. М. Вечтомова [13]. Пучковым представлениям полуколец посвящена докторская диссертация В. В. Чермных[14]

Встала задача разработки теории функциональных (пучковых) представлений полутел. Для колец и полуколец структурные пучки строились, как правило, над некоторыми пространствами их идеалов. В случае полутел необходимо привлекать пространство ядер (конгруэнций) полутел. Для этого требуется изучить свойства ядер полутел и определить спектральные пространства, над которыми могут быть построены структурные пучки полутел.

Цель работы. Получение функциональных представлений полутел и их

[13] Вечтомов, Е. М. Функциональные представления колец [текст] / Е. М. Вечтомов. – М.: МПГУ им. Ленина, 1993. – 190 с.

[14] Чермных, В. В. Функциональные представления полуколец и полумодулей: дис. ... докт. физ.-матем. наук: 01.01.06: защищена 28.06.2007. – Киров: ВятГГУ, 2007. – 234 с.

применение к описанию строения полутел.

Методы исследования. В диссертации используются понятия, идеи и методы теории групп, теории колец, теории решеток, теории полуколец, в частности теории arp-полуколец, универсальной алгебры и общей топологии.

Научная новизна. Все результаты работы являются новыми. В качестве основных **результатов, выносимых на защиту**, выделим следующие:

1. Введено понятие ограниченного полутела. Доказано, что ограниченность полутела равносильна сократимости всех его конгруэнций. Показано, что подполутело (2) любого полутела является ограниченным.

2. Рассмотрены условия дистрибутивности полутел. Найден критерий дистрибутивности полуполя.

3. Начато изучение полутел с образующей. Показано, что всякое полутело с конечным числом образующих имеет одну образующую. Доказано, что любое полутело вкладывается в полутело с образующей.

4. Определены понятия неприводимого и максимального спектров полутела. В терминах их компактности дана характеризация полутел с образующей.

5. Построены универсальные структурные пучки полутел, аналогичные пучкам Пирса и Ламбека для колец.

6. Получены изоморфные функциональные представления для сильно гельфандовых и бирегулярных полутел.

7. Даны пучковые характеризации бирегулярных и булевых полутел, изучена их алгебраическая структура.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы специалистами в области теории полуколец, в дальнейших исследованиях полутел, при чтении спецкурсов и проведении спецсеминаров в высших учебных заведениях.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались на семинаре "Кольца и модули" кафедры высшей алгебры МГУ им. М. В. Ломоносова (февраль 2006 года), на научном семинаре кафедры алгебры и математической логики Казанского государственного университета (сентябрь 2008 года), на итоговых научных конференциях Вятского государственного гуманитарного университета (ВятГГУ) и на научном алгебраическом семинаре ВятГГУ в 2004–2008 г.г. Они были представлены на Международных математических конференциях в Орле (2006 год), Красноярске (2007 год), Тамбове (2008 год), Москве (2008 год).

Публикации. По теме диссертации имеется 11 работ, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 10 параграфов (нумерация параграфов сплошная), списка литературы из 68 наименований и предметного указателя. Общий объем диссертации 95 страниц.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** обоснована актуальность темы, приводится перечень основных результатов работы и обзор начальных сведений о полутелах.

Первая глава посвящена началам теории полутел. В первом параграфе введены понятия полутела и его ядра, приведены примеры и сформулированы известные свойства полутел и их ядер, построено кольцо разностей произвольного полутела.

Дадим определение ядра полутела. *Ядром* полутела называется класс единицы некоторой его конгруэнции. Ядро может быть определено как нормальная подгруппа A полутела U со свойством

$$x, y \in U \ \& \ x + y = 1 \ \& \ a, b \in A \ \Rightarrow \ ax + by \in A.$$

Во втором параграфе рассматривается взаимосвязь решетки $\mathrm{Con}U$ всех конгруэнций (ядер) полутела U и решетки идеалов его кольца разностей, изучаются свойства сократимых конгруэнций. Доказано, что ограниченность полутела равносильна сократимости всех его конгруэнций.

Известно, что для любого полутела U решетка $\mathrm{Con}U$ модулярна и множество $\mathfrak{B}(U)$ всех ее дополняемых элементов является булевой подрешеткой в $\mathrm{Con}U$ (теорема 1.1).

Полутело называется *ограниченным*, если оно совпадает с главным ядром, порожденным элементом $2 = 1 + 1$, и *сократимым*, если оно удовлетворяет квазитождеству $a + c = b + c \Rightarrow a = b$.

Теорема 2.1. *Для любого полутела U следующие условия эквивалентны:*

1) *U ограниченно;*

2) *любая конгруэнция ρ на U сократима, то есть факторполутело U/ρ сократимо;*

3) *решетка конгруэнций на U изоморфна решетке идеалов кольца разностей.*

Вторая глава посвящена дальнейшему изучению ядер полутел. В третьем параграфе изучаются свойства главных ядер. Получено описание главного ядра (a), порожденного центральным элементом a, большим 1 в естественном порядке.

В четвертом параграфе рассмотрены *полутела с конечным числом образующих* – полутела U вида $U = (e_1) \cdot \ldots \cdot (e_n)$, $n \in \mathbb{N}$, при этом элементы e_i называются *образующими* полутела. Если $n = 1$, то полутело называется *полутелом с образующей*. Доказано

Предложение 4.4. *Если полутело U имеет конечное число образующих, то оно является полутелом с образующей.*

Полутело называется *идемпотентным*, если в нем выполняется тождество $a + a = a$, и *зероидным*, если $a + b = b$ для некоторых его элементов a, b.

Доказано, что любое полутело вложимо в полутело с образующей:

Теорема 4.1. *Любое полутело (идемпотентное полутело) U изоморфно вкладывается – в качестве наибольшего собственного ядра – в зероидное (идемпотентное) полутело V с центральной образующей. При этом все собственные ядра полутела V суть в точности ядра полутела U.*

Предложение 4.8. *Для того чтобы прямое произведение непустого семейства $(U_i)_{i \in I}$ нетривиальных полутел имело центральную образующую, необходимо и достаточно, чтобы I было конечно, а все U_i были полутелами с центральной образующей.*

В частности данное предложение справедливо для ограниченных полутел.

В пятом параграфе рассматриваются условия дистрибутивности полутел. Полутело U называется *дистрибутивным* (*простым*), если решетка его ядер $\mathrm{Con}U$ дистрибутивна (двухэлементна).

Предложение 5.2. *Если некоторое подполутело полутела U, являющееся ядром в U, дистрибутивно, то и само полутело U дистрибутивно.*

Предложение 5.3. $\mathrm{Con}(2)$ – *ретракт* $\mathrm{Con}U$ *для любого полуполя* U.

Получен критерий дистрибутивности полуполя:

Следствие 5.1. *Полуполе U дистрибутивно тогда и только тогда, когда дистрибутивна решетка идеалов кольца разностей полуполя* (2).

В шестом параграфе изучаются свойства неприводимых ядер полутел. Собственное ядро $A \in \mathrm{Con}U$ полутела U называется *неприводимым*, если из $B \cap C \subseteq A$ следует $B \subseteq A$ или $C \subseteq A$ для любых $B, C \in \mathrm{Con}U$.

Доказан следующий принципиальный результат:

Теорема 6.1. *Любое собственное ядро полутела содержится в некотором его неприводимом ядре.*

В качестве следствия получаем: максимальные ядра любого полутела неприводимы.

Введены понятия неприводимого и максимального спектров полутела. Топологические пространства $\mathrm{Spec}U$ всех неприводимых ядер и $\mathrm{Max}U$ всех максимальных ядер полутела U со стоуновской топологией назовем соответственно *неприводимым* и *максимальным спектром* полутела U.

Получена спектральная теорема для полутел с образующей:

Теорема 6.2. *Для любого полутела U эквивалентны условия:*

1) *U полутело с образующей;*

2) *неприводимый спектр* $\mathrm{Spec}U$ *компактен;*

3) *максимальный спектр* $\mathrm{Max}U$ *компактен и любое собственное ядро полутела U содержится в некотором максимальном ядре.*

Сформулированы и доказаны свойства неприводимых ядер дистрибутивных полутел U. Доказано, что для дистрибутивного полутела U множества

$$(a)^* = \{u \in U \mid (u) \cap (a) = \{1\}\}, \quad a \in U,$$

$$O_P = \{a \in U \mid (a)^* \nsubseteq P\}, \quad P \text{ – неприводимое ядро в } U,$$

являются ядрами. Полутела, обладающие этим свойством, будем называть *полутелами с условием* K.

Полутело называется *бирегулярным*(*булевым*), если все его главные ядра (все ядра) дополняемы.

Для бирегулярных полутел доказано

Предложение 6.3. *Всякое бирегулярное полутело* U *дистрибутивно, все его неприводимые ядра* P *максимальны и равны* O_P *и любое его ядро является пересечением максимальных ядер, его содержащих.*

В **третьей главе** исследуются пучки полутел, их полутела сечений и функциональные представления полутел. В седьмом параграфе рассматриваются пучки полутел над нульмерным компактом. С помощью теории *arp*-полуколец доказана важная техническая лемма:

Лемма 7.2. *Пусть* a *– элемент ядра* A *полутела сечений* $\Gamma = \Gamma(X, \Pi)$ *пучка полутел над нульмерным компактом* X, W *– произвольное открыто-замкнутое подмножество в* X. *Тогда сечение*

$$b = \begin{cases} a, & \text{на } W; \\ 1 & \text{на } X \backslash W \end{cases}$$

принадлежит ядру A.

На основании этой леммы получено описание неприводимых и максимальных ядер полутела сечений. Для произвольной точки $x \in X$ пусть $\pi_x : \Gamma(X, \Pi) \to U_x$ – гомоморфизм полутел, заданный правилом:

$$\pi_x(s) = s(x) \text{ для любого } s \in \Gamma(X, \Pi).$$

Теорема 7.1. *Максимальные* (*неприводимые*) *ядра полутела* $\Gamma = \Gamma(X, \Pi)$ *сечений пучка полутел* U_x *над нульмерным компактом* X *– это в точности ядра вида* $\pi_x^{-1}(K_x)$, *где* $x \in X$ *и* K_x *– максимальное* (*неприводимое*) *ядро в* U_x.

В восьмом параграфе установлены взаимосвязи некоторых важнейших свойств полутела сечений пучка полутел над нульмерным компактом с соответствующими свойствами его полутел-слоев:

Теорема 8.1. *Полутело $\Gamma = \Gamma(X, \Pi)$ сечений пучка Π полутел U_x над нульмерным компактом X дистрибутивно (ограниченно, зероидно) в том и только том случае, когда дистрибутивны (ограниченны, зероидны) все его слои U_x.*

Также в предложении 8.1 доказано сохранение ряда других свойств полутел.

В девятом параграфе построены универсальные структурные пучки $\mathcal{P}(U)$ и $\mathfrak{L}(U)$ полутел для нетривиальных полутел U, аналогичные пучкам Пирса[15] и Ламбека[16] для колец.

Теорема 9.1. *Любое полутело U изоморфно полутелу всех сечений пучка $\mathcal{P}(U)$ полутел $\Gamma_{\mathcal{M}}$, являющихся факторполутелами полутела U, над нульмерным компактом* $\mathrm{Max}\mathfrak{B}(U)$.

Через $\mathrm{Max}\mathfrak{B}(U)$ обозначим максимальный спектр булевой решетки всех дополняемых ядер полутела U.

Рассматриваются свойства канонического непрерывного отображения $\varphi : \mathrm{Max}U \to \mathrm{Max}\mathfrak{B}(U)$, заданного формулой $\varphi(M) = \{A \in \mathfrak{B}(U) \mid A \subseteq M\}$ для любого $M \in \mathrm{Max}U$.

Предложение 9.1. *Пусть U – полутело с условием K. Тогда существует точное функциональное представление U в факторном пучке $\mathfrak{L}(U)$ полутел U/O_P над неприводимым спектром* $\mathrm{Spec}U$.

Вводится понятие сильно гельфандова полутела. Полутело U называется *сильно гельфандовым*, если для любых двух различных максимальных ядер M и N в U существует дополняемое ядро $A \subseteq M$, не лежащее в N.

Теорема 9.3. *Произвольное полутело U с образующей и с условием K сильно гельфандово тогда и только тогда, когда оно изоморфно полутелу $\Gamma(X,\ \Pi)$ всех сечений некоторого пучка Π локальных полутел U_x над нульмерным компактом X.*

[15] Pierce, R. S. Modules over commutative regular rings [text] / R. S. Pierce // Mem. Amer. Math. Soc. – 1967. – P. 1–112

[16] Lambek, J. On representation of modules by sheaves of factor modules [text] / J. Lambek // Can. Math. Bull. – 1971. – 14. – № 3. – P. 359–368

Бирегулярные и булевы полутела исследуются в десятом параграфе.

Получена функциональная характеризация бирегулярных полутел, являющаяся определенным аналогом классической теоремы Даунса-Гофмана[17] для бирегулярных колец. Заметим, что распространение теоремы Даунса-Гофмана на бирегуляные полукольца осуществлено Е. М. Вечтомовым и О. В. Старостиной [18].

Теорема 10.1. *Произвольное полутело* U *бирегулярно тогда и только тогда, когда оно изоморфно полутелу всех сечений некоторого пучка простых полутел и тривиальных полутел над нульмерным компактом.*

Если при этом полутело U с образующей, то в формулировке теоремы 10.1 можно оставить только простые полутела.

Теорема 10.2. *Любое бирегулярное полутело раскладывается в прямое произведение бирегулярного идемпотентного полутела и бирегулярного ограниченного полуполя.*

С помощью отображения φ доказано (предложение 10.1 и следствие 10.4): для любого бирегулярного (булева) полутела U нульмерный компакт $\mathrm{Max}\mathfrak{B}(U)$ служит компактификацией (компактификацией Стоуна-Чеха) локально компактного нульмерного (дискретного) пространства $\mathrm{Max}U$.

В терминах пирсовского пучка $\mathcal{P}$ дана характеризация булевых полутел:

Предложение 10.2. *Для того чтобы полутело* U *было булевым, необходимо и достаточно, чтобы все слои пучка* $\mathcal{P}(U)$ *являлись простыми или тривиальными полутелами, а* $\mathrm{Max}U$ *совпадало с множеством изолированных точек базисного пространства* $\mathrm{Max}\mathfrak{B}(U)$.

Следствие 10.2. *Полутело является булевым полутелом с образующей тогда и только тогда, когда оно изоморфно прямому произведению конечного числа простых полутел.*

---

[17] Dauns, J. The represention of biregular rings by sheaves [text] / J. Dauns, K. H. Hofmann // Math. Z. – 1966. – V. 91. – № 2. – P. 103 – 123

[18] Вечтомов, Е. М. Обобщенные абелево-регулярные положительные полукольца [текст] / Е. М. Вечтомов, О. В. Старостина // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. – 2007. – Вып. 7. – С. 3–16

В заключение параграфа приведены примеры бирегулярных полутел.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Евгению Михайловичу Вечтомову за постановку задач, постоянное внимание к работе, полезные обсуждения и поддержку.

Работы автора по теме диссертации

1. Черанева, А. В. О сократимых конгруэнциях на полутелах [текст] / А. В. Черанева // Вестник ВятГГУ. Информатика. Математика. Язык. 2005. – № 3. – С. 160–163 (0,3 п.л.).

2. Черанева, А. В. О конгруэнциях на полутелах [текст] / А. В. Черанева // Чебышевский сборник. – 2005. – Т. 6. – Вып. 4(16). – С. 164–171 (0,58 п.л.).

3. Черанева, А. В. О главном ядре, порожденном 2 [текст] / А. В. Черанева // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2006. – Вып. 8. – С. 120–125 (0,34 п.л.).

4. Черанева, А. В. О дистрибутивности полутел [текст] / А. В. Черанева // Современные методы физико-математических наук. Труды международной конференции. – Т. 1. – Орел: Орловский гос. ун-т, 2006. – С. 198–200 (0,36 п.л.).

5. Черанева, А. В. Кольцо разностей полутела [текст] / А. В. Черанева // Вестник ВятГГУ. Информатика. Математика. Язык. – 2007. – № 4. – С. 205–207 (0,25 п.л.).

6. Черанева, А. В. О решетке конгруэнций полутела [текст] / А. В. Черанева // Международная конференция "Алгебра и ее приложения". – Красноярск: Сибирский федерал. ун-т, 2007. – С. 143 (0,04 п.л.).

7. Вечтомов, Е. М. Неприводимые ядра полутел [текст] / Е. М. Вечтомов, А. В. Черанева // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2008. – Вып. 10. – С. 25–31 (0,44 п.л., соискателю принадлежит 60%).

8. Вечтомов, Е. М. Пучки полутел над нульмерным компактом [текст] / Е. М. Вечтомов, А. В. Черанева // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2008. – Вып. 10. – С. 32–44 (0,8 п.л., соискателю принадлежит 60%).

9. Вечтомов, Е. М. Аналог пучкового представления Пирса для полутел [текст] / Е. М. Вечтомов, А. В. Черанева // Современная математика и математическое образование, проблемы истории и философии математики. Международная научная конференция. – Тамбов: Тамбовский гос. ун-т, 2008. – С. 24–27 (0,36 п.л., соискателю принадлежит 60%).

10. Вечтомов, Е. М. О свойствах полутел [текст] / Е. М. Вечтомов, А. В. Черанева // Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша. Тезисы докладов. – М: Механико-математический факультет МГУ. – 2008. – С. 56–57 (0,06 п.л., соискателю принадлежит 60%).

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК

11. Вечтомов, Е. М. К теории полутел [текст] / Е. М. Вечтомов, А. В. Черанева // Успехи математических наук. – 2008. – Т. 62. – Вып. 2. – С. 161–162 (0,2 п.л., соискателю принадлежит 70%).

Подписано в печать ______

Формат 64 × 80/16.

Бумага офсетная. Усл. печ. л. 1,0.

Тираж 100 экз. Заказ №____

ЦДООШ 610002, г. Киров, ул. Ленина, 105, т. (8332) 351503